Внутренняя логика универсальной логики[1]

В. Л. Васюков

ABSTRACT. Early in [1] some categorical constructions were introduced which describe the inner structure of the category of logical systems. Since this structure both the topos and complemented topos were featured by, then following Benabou-Mitchell's approach the inner language is introduced which is not a standard topos language but an extended one rendering the construction of the language for so-called H-B-logic whose algebraic models are semi-Boolean algebras. McLarty's sequential version of topos logic is extended to the case of the category of logical systems and the final inner logic formulation is based on the sequential formulation of H-B-logic.

Ключевые слова: внутренний язык топоса, дуальный внутренний язык, логика топоса, категрия логических систем, H-B-логика.

1 Введение

Как известно, универсальная логика представляет собой общую теорию логик, рассматриваемых как особая разновидность математических структур, по аналогии с тем, как универсальная алгебра рассматривает конкретные алгебраические системы (см. [4, с. 6]). Теоретико-категорный подход, когда логические системы объединяются в категорию специального вида, снабжает нас некоторым фундаментом для исследования универсума универсальной логики. В рамках этого подхода удается ввести категорные конструкции, которые наряду с копроизведениями, лежащими в основе расслоения логик, описывают внутреннюю структуру категории логических систем. Как оказалось, подобный универсум универсальной логики обладает структурой как топоса, так и *паранепротиворечивого дополняющего топоса*, что было продемонстрировано в работах [2, 9].

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ № 06-03-00195а «Структура универсальногй логики».

Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что для структуры универсума универсальной логики характерно наличие и интуиционистской и паранепротиворечивой (брауэровой) структуры. «Внутренняя логика» топоса, как известно, является интуиционистской логикой, что же касается внутренней логики дополняющего топоса, то здесь, по-видимому, следует ожидать наличие антиинтуиционистской (брауэровой) логики. Подобные металогические системы могут послужить удобным средством для получения утверждений о логических системах и их переводах. Сама по себе система универсальной логики представляет, по сути дела, систему универсальной металогики — логики логических систем и их переводов.

В настоящей работе предпринимается попытка точного описания этой внутренней логики универсальной логики. Показано, что она основывается на секвенциальной формулировке H-B-логик.

В общем виде сами теоретико-категорные конструкции, описывающие структуру универсума универсальной логики, можно охарактеризовать следующим образом. Категорию сигнатур **Sig,** над которой надстраивается категория логических систем **Log**, можно определить следующим образом:

- *Объекты*: функции $\Sigma \to \mathbb{N}$, где Σ интуитивно понимается как множество связок, а функции — как ассоциирующие со связкой ее арность;

- *Морфизмы*: морфизм $\Sigma \to \Sigma'$ представляет собой гомоморфизм между абсолютно свободными алгебрами над Σ и Σ'соответственно. Иначе их можно описать как отображения $\Sigma \to F(\Sigma')$, сопоставляющие примтивной n-арной связке возможную *производную* n-арную связку.

Кратко категория **Log** логических систем, которая будет использоваться в качестве основного инструмента исследования, описывается во втором параграфе.

В третьем параграфе рассматривается внутренний язык категории **Log**. Вначале строится обычный внутрнний язык топоса (поскольку **Log** обладает структурой топоса), затем строится дуальный ему внутренний язык (поскольку **Log** обладает структурой и дополняющего топоса) и, наконец, формулируется внутренний язык, основывающийся на конструкции языка для так называемой H-B-логики, чьими алгебраическими моделями являются полубулевы алгебры.

В четвертом параграфе описывается внутренняя логика категории **Log**, дается секвенциальная формулировка внутренней логики **Log**. Эта формулировка является, с одной стороны, расширением секвенциальной формулировки внутреннего языка топоса (в версии Маклэрти), а сдругой стороны, основывается на секвенциальной формулировке H-B-логики, предложенной Ц. Раушер.

2 Категория логических систем Log

Приведем краткое описание формализма, служащего фундаментом построения категории логичесих систем. Как и в [1, с.109–114] будем иметь дело с логическим языком, который свободно порожден некоторой сигнатурой, включающей в себя, как это обычно делается, конструкторы различной местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сигнатура представляет собой индексированное множество $\Sigma = \{\Sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где каждое Σ^n является n-арным конструктором.

Будем считать, что множество пропозициональных переменных включено в Σ^0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Язык* над данной сигнатурой Σ, который будет обозначаться L_Σ, строится индуктивно обычным способом:

- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma$;
- *если* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\Sigma$ *и* $c \in \Sigma^n$, *то* $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L_\Sigma$.

Будем называть Σ-*формулами* элементы L_Σ, или просто *формулами,* когда Σ ясно из контекста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Логическая система* является парой $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где Σ есть сигнатура, а $\vdash$ представляет собой оператор присоединения следствий в L_Σ (в смысле Тарского, см. [10]), т. е. $\vdash: 2^{L_\Sigma} \to 2^{L_\Sigma}$ является функцией, обладающей следующими свойствами для каждых $\Gamma, \Phi \subseteq L_\Sigma$:

- *Экстенсивность*: $\Gamma \subseteq \Gamma^\vdash$;
- *Монотонность*: *если* $\Gamma \subseteq \Phi$, *то* $\Gamma^\vdash \subseteq \Phi^\vdash$;
- *Идемпотентность*: $(\Gamma^\vdash)^\vdash \subseteq \Gamma^\vdash$.

Здесь $\Gamma^\vdash$ есть множество следствий Γ. Для сохранения общности не будем требовать здесь и в дальнейшем, чтобы оператор присоединения следствий был финитным, и тем более структурным.

Поскольку нам потребуется принимать во внимание выразительную силу данной логической системы, нам придется ссылаться на ее логические связки (примитивные или производные). Будем считать раз и навсегда зафикисированным множество $\Xi = \{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ метапеременных. Для данной сигнатуры Σ и $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать множество L^k_Σ определенным индуктивно:

- $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \subseteq L^k_\Sigma$;
- $\Sigma^0 \subseteq L^k_\Sigma$;
- если $n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L^k_\Sigma$ и $c \in \Sigma^n$, то $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L^k_\Sigma$.

Очевидным образом $L_\Sigma = L^0_\Sigma$. Для данного $\varphi_n \in L^k_\Sigma$ будем записывать как $\varphi(\xi_1\backslash\psi_1, \ldots, \xi_k\backslash\psi_k)$ формулу, получаемую из φ одновременной заменой каждого вхождения ξ_1 в φ на ψ_i для каждого $i \leq k$.

Производная связка местности $k \in \mathbb{N}$ является λ-термом $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$, где $\varphi \in L^k_\Sigma$. Обозначим через DC^k_Σ множество всех производных k-местных связок над Σ. Отметим, что если $c \in \Sigma^n$ является примитивной связкой, то она также может рассматриваться как производная связка $c = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для данной производной связки $d = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.\varphi$ будем писать $d(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ вместо $\varphi(\xi_1\backslash\psi_1, \ldots, \xi_k\backslash\psi_k)$.

Различные языки, порожденные различными сигнатурами, могут переводиться друг в друга с помощью понятия морфизма, когда примитивные связки одной сигнатуры отображаются в производные связки другой сигнатуры с сохранением соответствующей местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных сигнатур Σ_1 и Σ_2 *морфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является $\mathbb{N}$-индексированным семейством функций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to DC^n_{\Sigma_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Для данного морфизма сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ определяем его свободные расширения $h : L^k_{\Sigma_1} \to L^k_{\Sigma_2}$ для $k \in \mathbb{N}$ следующим образом:

- $h(\xi_i) = \xi_i$, если $\xi_i \in \Xi$;
- $h(c) = h^0(c)$, если $c \in \Sigma_1^0$;
- $h(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = h^0(c)(h(\varphi_1), \ldots, h(\varphi_n))$, если $c \in \Sigma_1^n$.

Функцию перевода h, удовлетворяющую вышеизложенным требованиям, будем называть *унифицированной*.

Сигнатуры и их морфизмы образуют категорию **Sig** с тождествами $id_\Sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такими, что $id^n_\Sigma(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \Sigma^n$, а композиция морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ и $g : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будет определяться как $g \circ f : \Sigma_1 \to \Sigma_3$, такая, что $(g \circ f)^n(c) = \xi_1, \ldots, \xi_n.g(\varphi)$, полагая, что $f^n(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_n.\varphi$.

Удобство использования унифицированных переводов сказывается при формулировке понятия морфизма между логическими системами. Для данной функции $h : L_{\Sigma_1} \to L_{\Sigma_2}$ с $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$ мы будем рассматривать множество $h[\Phi] = \{h(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. *Морфизм логических систем* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ представляет собой морфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такой, что $h[\Phi^{\vdash_1}] \subseteq h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Логические системы и их морфизмы образуют конкретную категорию **Log** над **Sig**.

Теорией логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ является, как обычно, множество $\Phi \subseteq L_\Sigma$, такое, что $\Phi^\vdash = \Phi$. Обозначим как $Th(\mathcal{L})$ множество всех теорий $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что множество $Th(\mathcal{L})$, упорядоченное по отношению включения, всегда является полной решеткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Пространство теорий* есть полная решетка $tsp = \langle Th, \leq \rangle$, т. е. частичный порядок $\leq$ на множестве Th, такой, что каждое $T \subseteq Th$ имеет наименьшую верхнюю грань (или пересечение) $\bigvee T$.

В частности, для данной логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ структура $tsp_{\mathcal{L}} = \langle Th(\mathcal{L}), \subseteq \rangle$ всегда будет пространством теорий (см., напр., [5]). Более того, переводы языков, ассоциированные с морфизмами логических систем, всегда действуют на операторы присоединения следствий таким образом, что в соответствующих пространствах теорий сохраняются пересечения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий. *Морфизм пространств теорий* $h : tsp_1 \to tsp_2$ представляет собой функцию $h : Th_1 \to Th_2$ такую, что $h(\bigvee_1 T) = \bigvee_2 h[T]$ для каждого $T \subseteq Th$.

Пространства теорий и их морфизмы образуют категорию **Tsp** с обычными тождествами и композицией функций. Более того, определение пространства теорий, индуцированного логической системой, может быть расширено на случай функтора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Отображения

- $Th(h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2) : tsp_1 \to tsp_2$, с $Th(h)(\Phi) = h[\Phi]^{\vdash_2}$ *в* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *для каждого* $\Phi \in Th(\mathcal{L}_1)$,

образуют функтор Th :**Log**$\to$**Tsp**.

Нетрудно показать, что Th представляет собой сопряженный функтор, но более интересно для нас понятие *эквиполлентности*, основанное на Th (см. [5, p. 107]), которое позволяет описать «сходство» логических систем. Но вначале напомним характеристику изоморфизма в категориях сигнатур **Sig** и **Log**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Две сигнатуры* Σ_1 *и* Σ_2 *изоморфны тогда и только тогда, когда существует семейство биекций* $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to \Sigma_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Две логические системы* $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ *и* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *изоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ *такой, что* $h[\Phi^{\vdash_1}] = h[\Phi]^{\vdash_2}$ *для каждого* $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Наконец, с помошью следующего определения можно ввести понятие *эквиполлентности*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Две логические системы $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ эквиполлентны, если существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ такие, что $Th(h)$ и $Th(g)$ устанавливают изоморфизм между $tsp_{\mathcal{L}_1}$ и $tsp_{\mathcal{L}_2}$ в случае $Th(h) = Th(g)^{-1}$.

Фактически изоморфизмы в **Log** образуют специальный случай эквиполлентности и эквиполлентные логические системы всегда требуются для определения изоморфности логических пространств. Более того, можно дать альтернативную характеристику эквиполлентности в терминах внутреннего понятия логической эквивалентности каждой логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ следующим образом. Говорят, что две формулы $\varphi, \psi \in L_\Sigma$ *логически эквивалентны* в $\mathcal{L}$, $\varphi \equiv_{\mathcal{L}} \psi$, если одновременно имеет место $\varphi \in \{\psi\}^{\vdash}$ и $\psi \in \{\varphi\}^{\vdash}$, или, что равносильно, если $\{\varphi\}^{\vdash} = \{\psi\}^{\vdash}$. Следующа лемма из [5, p.108] показывает, что теории системы $\mathcal{L}$ фактически независимы, по модулю логически эквивалентных формул, от способа их представления.

ЛЕММА 12. *Пусть* $\Phi, \Gamma \subseteq L_\Sigma$. *Тогда* $\Phi^{\vdash} = \Gamma^{\vdash}$ *всякий раз, когда выполняются следующие два условия:*

- *для каждой* $\varphi \in \Phi$ *существует* $\varphi' \in \Gamma$ *такая, что* $\varphi \equiv_{\mathcal{L}} \varphi'$*;*
- *для каждой* $\psi \in \Gamma$ *существует* $\psi' \in \Phi$ *такая, что* $\psi \equiv_{\mathcal{L}} \psi'$.

Альтернативная характеристика понятия эквиполлентности может быть дана с помощью следующего определения [5, p. 108].

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Пусть* $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ *и* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *являются логическими системами. Тогда* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *эквиполлентны тогда и только тогда, когда существуют* ***Log****-морфизмы* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ *такие, что выполняются следующие два условия:*

- $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ *для каждой* $\varphi \in L_{\Sigma_1}$*;*
- $\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ *для каждой* $\psi \in L_{\Sigma_2}$.

Как показано в [1], в категории **Log** существуют копроизведения, которые можно охарактеризовать с помощью следующего определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда их копроизведением является логическая система $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{1\oplus 2} \rangle$, где $\vdash_{1\oplus 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\oplus 2}$: $2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}} \to 2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}}$ такой, что

- $\Gamma \vdash_i \varphi$ *влечет* $\Gamma \vdash_{1\oplus 2} \varphi$ *для всех* $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$

и i_1, i_2 *являются инъекциями копроизведения* $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$.

Однако в **Log** единственность стрелок соответствующих диаграмм имеет место лишь с точностью до отношения эквивалентности $\equiv$, основанном на эквиполлентности логических систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Тождество **Log**-морфизмов представляет собой наименьшее отношение эквивалентности $\equiv$ между морфизмами, такое, что

- $f \equiv g$ *тогда и только тогда, когда* $dom(f)$ *эквиполлентна* $dom(g)$ *и* $codom(f)$ *эквиполлентна* $codom(g)$, т. е. $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *эквиполлентны, так же как и* $\mathcal{L}'_1$ *эквиполлентна* $\mathcal{L}'_2$, *для морфизмов логических систем* $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, f' : \mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}'_2$;
- $gf = h$ *влечет* $gf \equiv h$;
- $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$ *влечет* $gf \equiv g'f'$;
- $f id_{\Sigma_1} \equiv f \equiv id_{\Sigma_2} f$;
- $(hg)f \equiv h(gf)$

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3, h : \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_4$.

$\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквиполлентны тогда и только тогда, когда существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$, такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для всякой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ для всякой $\psi \in L_{\Sigma_2}$. Отсюда первое условие может быть переписано как $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда имеются, во-первых, **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}'_1$ и $g : \mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}_1$ такие,что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_1} h(g(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_1}$, и, во-вторых, **Log**-морфизмы $h' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}'_1$ и $g' : \mathcal{L}'_2 \to \mathcal{L}_2$ такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_2} g(h(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_2}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_2} h(g(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_2}$.

Отсюда определение 15 должно быть расширено следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- *если* $[f, g] = h$, *то* $[f, g] \equiv h$, *и т.д.;*
- *если* $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$, *то* $[gf] \equiv [g'f']$;
- $[f, g]i_1 \equiv f, [f, g]i_2 \equiv g$, *и т.д.*

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$.

Конструкция амальгам в категории **Log** выглядит следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle, \mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1$, $f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их амальгамой является $\mathcal{L}_{1\ominus 2} = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2, \vdash_{(1\ominus 2)} \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, где

- *морфизм сигнатур* $q : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ *является коуравнителем* $i_1 \circ f_1 : \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ *и* $i_2 \circ f_2 : \Sigma \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$*;*
- $\vdash_{1\ominus 2}$ *есть оператор присоединения следствий* $\vdash_{1\ominus 2}$: $2^{L_{\Sigma \cup i_1(\Sigma_1 \setminus f_1(\Sigma)) \cup i_2(\Sigma_2 \setminus f_2(\Sigma))}} \to 2^{L_{\Sigma \cup i_1(\Sigma_1 \setminus f_1(\Sigma)) \cup i_2(\Sigma_2 \setminus f_2(\Sigma))}}$;
- $\mathcal{L}_{1\ominus 2}$ *является наименьшей системой для* $tsp_{\mathcal{L}_{1\ominus 2}} = \langle Th(\mathcal{L}_{1\ominus 2}), \subseteq \rangle$, *в которой* $\Gamma \vdash_i \varphi$ *влечет* $\Gamma \vdash_{1\ominus 2} \varphi$ *для каждого* $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$.

В **Log** существуют также произведения и обратные образы, конструкция которых дается следующими определениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ — логические системы. Тогда их произведением является $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1\otimes 2} \rangle$, где $\vdash_{1\otimes 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\otimes 2}$: $2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}} \to 2^{L_{pr_1(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \times pr_2(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)}}$ такой, что

- $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1\otimes 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ *влечет* $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ *для каждого* $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$;

а pr_1, pr_2 *являются проекциями произведения* $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma, f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их *обратным образом* является

$\mathcal{L}_{1\odot 2} = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2, \vdash_{1\odot 2} \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, *где*

- $q : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ *является уравнителем* $f_1 pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$ *и* $f_2 pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$;
- $\vdash_{1\odot 2}$ *есть оператор присоединения следствий* $\vdash_{1\odot 2}$: $2^{L_{\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2}} \to 2^{L_{\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2}}$;
- $\mathcal{L}_{1\odot 2}$ *есть наименьшая система для* $tsp_{\mathcal{L}_{1\odot 2}} = \langle Th(\mathcal{L}_{1\odot 2}), \subseteq \rangle$, *в которой*

  $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1\odot 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ *влечет* $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ *для каждого* $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$.

При этом определение $\equiv$ в **Log** следует расширить следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, определенное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- *если* $\langle f, g \rangle = h$, *то* $\langle f, g \rangle \equiv h$, *и т.д.;*
- *если* $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$, *то* $\langle gf \rangle \equiv \langle g' f' \rangle$;
- $pr_1 \langle f, g \rangle \equiv f, pr_2 \langle f, g \rangle \equiv g$, *и т.д.*

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$.

Наконец, в **Log** существуют экспоненциалы и коэкспоненциалы, определеяемые следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда коэкспоненциал $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ есть система ${}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_{1 \Leftarrow 2} \rangle$, где $\vdash_{1\Leftarrow 2}$означает $\vdash_{1\Leftarrow 2}$: $2^{L_{\Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1}}$, такое, что

- $\Gamma \vdash_{1\Leftarrow 2} \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $g[\Gamma] \vdash_2 g(\varphi)$ *для всех* **Log**-*морфизмов* $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle\Sigma_1, \vdash_1\rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle\Sigma_2, \vdash_2\rangle$ будут логическими системами. Тогда экспоненциалом $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ является система $\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2} = \langle\Sigma_1, \vdash_{2\Rightarrow 1}\rangle$, где $\vdash_{2\Rightarrow 1}$означает $\vdash_{2\Rightarrow 1}$: $2^{L_{\Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1}}$ такой, что

- $\Gamma \vdash_{2\Rightarrow 1} \varphi$, *если и только если существуют* **Log**-*морфизмы* $h : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ *and* $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *такие, что* $h(g[\Gamma]) \vdash_1 h(g(\varphi))$.

Очевидным образом, если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ аксиоматизируемы (т. е. существуют такие Γ_1 и Γ_2 соответственно, что для любых $\varphi \in L_{\Sigma_1}, \psi \in L_{\Sigma_2}$ и $\Delta \subseteq L_{\Sigma_1}, \Phi \subseteq L_{\Sigma_2}$ мы имеем, что если $\varphi \in (\Delta)^{\vdash_1}, \psi \in (\Phi)^{\vdash_2}$ и $\varphi \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}, \psi \in (\Gamma_2)^{\vdash_2}$), то в определении выше $\Gamma \vdash_{2\Rightarrow 1} \varphi$ всякий раз, когда $h(g(\varphi)) \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}$.

Все рассмотренные конструкции позволяют получить доказательство следующего утверждения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. ***Log*** *является топосом и дополняющим топосом.*

При этом в качестве терминального объекта выступает логическая система $\mathcal{L}_\top = \langle\Sigma_\top, \vdash_\top\rangle$, где $\Sigma_\top^0 = \{\top\}$, и $\Sigma_\top^k = \{\top^k\}$ для $k > 0$, где $\top^k$ есть k-местная постоянная функция (т. е. бинарная, тернарная и т.д.), а $\vdash_\top$ является максимальным оператором присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно). Конечно, $\mathcal{L}_\top$ будет терминальным объектом лишь с точностью до эквивалентности. В качестве начального объекта можно использовать логическую систему $\mathcal{L}_\perp = \langle\Sigma_\perp, \vdash_\perp\rangle$, где $\Sigma_\perp^0 = \{\perp\}$, и $\Sigma_\perp^k = \{\perp^k\}$ для $k > 0$, где $\perp^k$ есть k-местная постоянная функция (т. е. бинарная, тернарная и т.д.), а $\vdash_\perp$ является максимальным оператором присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно). Что же касается классифицирующего объекта, то определяем его как $\Omega = \langle\Sigma_\Omega, \vdash_\Omega\rangle$, где $\Sigma_\Omega^0 = \{\top, \perp\}, \Sigma_1^k = \{\top^k, \perp^k\}$ для $k > 0$ и $\vdash_\Omega$является одновременно максимальным $\top$-отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\top$ и $\top^k$) и максимальным $\perp$-отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\perp$ и $\perp^k$). В качестве классификатора подобъектов $true$ мы имеем $true(\Sigma_\top) = \Sigma_\top \subseteq \Sigma_\Omega$ и $true(\vdash_\top) = \vdash_\top \subseteq \vdash_\Omega$, т. е. $true$ сохраняет $\top$-максимальность. Для дополняющего классификатора объектов $false$ мы имеем $false(\Sigma_\top) = \Sigma_\perp \subseteq \Sigma_\Omega$ и

$false(\vdash_{\top}) = \vdash_{\perp} \subseteq \vdash_{\Omega}$, т. е. $false$ преобразует максимальное $\top$-отношение присоединения следствий в максимальное $\perp$-отношение присоединения следствий.

3 Внутренний язык Log

Как известно, каждому топосу можно сопоставить язык, который можно использовать как удобное средство для построения высказываний об объектах и морфизмах данного топоса или даже доказательства теорем о них (см. [3, с. 172]). Воспользуемся версией построения внутреннего языка, принадлежащей К. Маклэрти [6, p. 126], для описания внутреннего языка **Log** как топоса.

Внутренний язык типизирован, в качестве типов принимаются объекты **Log**[2]. Термы и их типы определяются индуктивно:

(LT1) Каждому **Log**-объекту $\mathcal{L}$ сопоставляется список переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Каждая переменная над $\mathcal{L}$ является термом типа $\mathcal{L}$.

(LT2) Для каждого морфизма $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и терма s типа $\mathcal{L}_1$ выражение fs является термом типа $\mathcal{L}_2$. Каждый морфизм $c : \top \to \mathcal{L}$ с $\top$ в качестве области определения сам является термом типа $\mathcal{L}$ (будем называть его константой типа $\mathcal{L}$). Пусть ! означает константу тождественного морфизма для $\top$.

(LT3) Для каждого терма s_1 типа $\mathcal{L}_1$ и s_2 типа $\mathcal{L}_2$ имеется терм $\langle s_1, s_2 \rangle$ типа $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$.

(LT4) Для каждого терма s типа $\mathcal{L}_2$ и переменной y типа $\mathcal{L}_1$ имеется терм $(\lambda y)s$ типа $\mathcal{L}_2^{\mathcal{L}_1}$.

Переменная x *свободна*, если только она не связана лямбда-оператором (λx). Будем писать $(\lambda x.\mathcal{L}_1)$, чтобы отметить тип переменной. Терм без свободных переменных является *замкнутым*. Переменные на самом деле представляют собой не что иное, как теории $\mathcal{L}$.

[2]Маклэрти рассматривает не типы, а сорта, но мы, следуя обычной практике, будем говорить о типах.

Для данной переменной x и терма v того же самого типа будем обозначать $s(x/v)$ терм, возникающий в результате подстановки v вместо каждого свободного вхождения x в s. Если ни одна из свободных переменных v не становится связанной в $s(x/v)$, то будем говорить, что *v свободна для x в s*.

Предположим, что терм s имеет тип $\mathcal{L}'$ и все его свободные переменные находятся в списке $y_1, \ldots, y_k$, где все y-ки являются переменными над $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ соответственно. Тогда s соответствует морфизм $|s| : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}'$, который мы будем называть интерпретацией s. Интуитивно это означает, что приписывание значения каждой переменной, дающее каждой y_i значение в $\mathcal{L}_i$, определяет значение s. Поскольку морфизм $|s|$ действительно зависит от списка соответствующих переменных, следует указывать список в записи.

Будем использовать $\bar{x}$ для сокращенного обозначения списка $x_1, \ldots, x_n$. В этом случае $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ будет представлять собой список типов переменных того же самого порядка. Переменная может появляться в списке только однажды, но объект $\mathcal{L}$ будет появляться столько раз, сколько имеется переменных над $\mathcal{L}$ в списке. Для терма s типа $\mathcal{L}'$ и списка $\bar{x}$, включающего в себя все свободные переменные из s, будем писать $|s|_{\bar{x}} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}'$ для *интерпретации* относительно списка $\bar{x}$. Мы всегда будем предполагать, что наши списки переменных включают в себя все те переменные, которые свободны в термах, к которым мы их применяем. Если s не содержит свободных переменных, то $\bar{x}$ может представлять собой пустой список переменных, и, конечно, произведение пустого списка типов есть $\top$.

Определим теперь индуктивно интерпретацию относительно списков:

(I1) Для любого списка $\bar{x}$ и переменных x_i из списка $|x_i|_{\bar{x}}$ будет представлять собой проекцию $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_i$.

(I2) Для любого морфизма $f : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$,если s является термом типа $\mathcal{L}'$, то $|fs|_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \xrightarrow{|s|_{\bar{x}}} \mathcal{L}' \xrightarrow{f} \mathcal{L}''$. Для любой константы c интерпретацией $|c|_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \top \xrightarrow{c} \mathcal{L}''$.

(I3) Для любых термов s_1 типа $\mathcal{L}'$ и s_2 типа $\mathcal{L}''$ $|\langle s_1, s_2 \rangle|_{\bar{x}}$ представляет собой морфизм пары в $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}''$, индуцированный $|s_1|_{\bar{x}}$ и $|s_2|_{\bar{x}}$.

(I4) Для любого терма s типа $\mathcal{L}''$, если переменной y над $\mathcal{L}'$ нет в списке $\bar{x}$, то $|(\lambda y)s|_{\bar{x}}$ является *транспозицией* $|s|_{\bar{x},y} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$, т. е. морфизмом $\overline{|s|_{\bar{x},y}} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}''^{\mathcal{L}'}$. Если же связанная переменная y имеется в списке $\bar{x}$, то это нерелевантное совпадение. Тогда мы замещаем y в $(\lambda y)s$ какой-нибудь переменной над $\mathcal{L}'$, не содержащейся ни в s, ни в списке $\bar{x}$.

Согласно (LT2) для любых термов g типа $\mathcal{L}_2^{\mathcal{L}_1}$ и s типа $\mathcal{L}_1$ имеется терм $ev(\langle g, s\rangle)$, который будем записывать сокращенно как $g(s)$. Будем также использовать классообразующий оператор, записывая $\{x.\mathcal{L}_1 : s\}$ вместо $(\lambda x.\mathcal{L}_1)s$, когда s имеет тип Ω. Для терма P типа $\otimes^{\mathcal{L}_1}$ будем писать $x \in P$ вместо $ev(\langle P, x\rangle)$, а также часто будем опускать угловые скобки, записывая $f(x, y)$ вместо $f(\langle x, y\rangle)$.

Формулы будут представлять собой термы типа Ω. Согласно (LT2) для любых формул φ и ψ существуют формулы $\wedge(\varphi, \psi)$ и $\to (\varphi, \psi)$. Будем записывать это как $\varphi\wedge\ \psi$ и $\varphi \to \psi$. Имеются также формулы $\perp, \neg\varphi$.

Для любой формулы φ и переменной y над объектом $\mathcal{L}_1$ мы определяем формулу $(\forall y.\mathcal{L}_1)\varphi$ как сокращение для $\forall_{\mathcal{L}_1}\{y.\mathcal{L}_1 : \varphi\}$, откуда $(\forall y.\mathcal{L}_1)\varphi$ является утверждением, что само множество $\{y.\mathcal{L}_1 : \varphi\}$ типа $\mathcal{L}_1$. Интерпретация данной формулы для списка переменных $\bar{x}$ следует определению, т. е. представляет собой $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \overset{\overline{|\varphi|_{\bar{x},y}}}{\to} \Omega^{\mathcal{L}'} \overset{\forall_{\mathcal{L}'}}{\to} \Omega$, если переменная y не появляется в списке $\bar{x}$. Если же она есть в этом списке, то вначале она заменяется на какую-нибудь новую переменную. Заметим, что y связана в $(\forall y.\mathcal{L}_1)\varphi$.

Для любых a_1 термов и a_2 типа $\mathcal{L}_1$ стрелка $\delta_{\mathcal{L}_1} : \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_1 \to \Omega$ дает терм $\delta_{\mathcal{L}_1}(a_1, a_2)$, который сокращенно записываем как $a_1 = a_2$. Отсюда следует, что $|a_1 = a_2|_{\bar{x}}$ является классифицирующей стрелкой уравнителя $|a_1|_{\bar{x}}$ и $|a_2|_{\bar{x}}$.

Наконец, для любых мономорфизмов $i : \mathcal{L}' \rightarrowtail \mathcal{L}_1$ и $r : \mathcal{L}'' \rightarrowtail \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ будем записывать формулы $\mathcal{L}'(s)$ и $\mathcal{L}''s_1s_2$ как сокращения для $\chi_i(s)$ и $\chi_r(s_1, s_2)$, где s и s_1 являются любыми термами типа $\mathcal{L}_1$ и s_2 является любым термом типа $\mathcal{L}_2$.

Однако наше построение языка **Log** на этом не заканчивается, поскольку **Log** является не только топосом, но и дополняющим топосом. Мы пополняем список определений типов и термов следующими пунктами:

(LT5) Для каждого морфизма $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и котерма s типа $\mathcal{L}_1$ выражение $(fs)^o = f^o s$ является котермом типа $\mathcal{L}_1$. Каждый морфизм $c : \mathcal{L} \to \perp$ с $\perp$ в качестве области значения сам является котермом типа $\mathcal{L}$ (будем называть его коконстантой типа $\mathcal{L}$). Пусть ? означает коконстанту тождественного морфизма для $\perp$.

(LT6) Для каждого котерма s_1 типа $\mathcal{L}_1$ и s_2 типа $\mathcal{L}_2$ имеется котерм $[s_1, s_2]$ типа $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$.

(LT7) Для каждого котерма s типа $\mathcal{L}_2$ и переменной y типа $\mathcal{L}_1$ имеется котерм $s(\lambda y)$ типа ${}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2$.

Для котерма s типа $\mathcal{L}'$ и списка $\bar{x}$, включающего в себя все свободные переменные из s, будем писать $||s||_{\bar{x}} : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k$ для *коинтерпретации* относительно списка $\bar{x}$. Определение интерпретации относительно списков пополняется теперь следующими пунктами коинтерпретации:

(I5) Для любого списка $\bar{x}$ и переменных x_i из списка $||x_i||_{\bar{x}}$ будет представлять собой инъекцию $\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$.

(I6) Для любого морфизма $f : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$,если s является котермом типа $\mathcal{L}''$, то $||f^o s||_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}'' \stackrel{f^{-1}}{\to} \mathcal{L}' \stackrel{||s||_{\bar{x}}}{\to} \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$. Для любой коконстанты c коинтерпретацией $||c||_{\bar{x}}$ будет $\mathcal{L}'' \stackrel{c^O}{\to} \perp \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$.

(I7) Для любых котермов s_1 типа $\mathcal{L}'$ и s_2 типа $\mathcal{L}''$ $||[s_1, s_2]||_{\bar{x}}$ представляет собой морфизм пары из $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, индуцированный $||s_1||_{\bar{x}}$ и $||s_2||_{\bar{x}}$.

(I8) Для любого котерма s типа $\mathcal{L}''$, если переменной y над $\mathcal{L}'$ нет в списке $\bar{x}$, то $||s(\lambda y)||_{\bar{x}}$ является *котранспозицией* $||s||_{\bar{x},y} : \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n \oplus \mathcal{L}'$, т. е. морфизмом

$\overline{\overline{||s||_{\bar{x},y}}} :^{\mathcal{L}'} \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$. Если же связанная переменная y имеется в списке $\bar{x}$, то это нерелевантное совпадение. Тогда мы замещаем y в $s(\lambda y)$ какой-нибудь переменной над $\mathcal{L}'$, не содержащейся ни в s, ни в списке $\bar{x}$.

Согласно (LT5) для любых котермов g типа ${}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2$ и s типа $\mathcal{L}_1$ имеется котерм $ev^o([g, s])$, который будем записывать сокращенно как $g^o s$. Будем также использовать коклассообразующий оператор, записывая $\{x.\mathcal{L}_1 : s\}^o$ вместо $s(\lambda x.\mathcal{L}_1)$, когда s имеет тип Ω. Для терма P типа ${}^{\mathcal{L}_1}\otimes$ будем писать $x \in^o P$ вместо $ev^o([P, x])$, а также часто будем опускать угловые скобки, записывая $f^o(x, y)$ вместо $f^o([x, y])$.

Формулы будут представлять собой котермы типа Ω. Согласно (LT5) для любых формул φ и ψ существуют формулы $\vee(\varphi, \psi)$ и $\leftarrow(\varphi, \psi)$. Будем записывать это как $\varphi \vee \psi$ и $\varphi \leftarrow \psi$. Имеются также формулы $\top, \ulcorner \varphi$.

Обратим, однако, внимание на тот факт, что в случае **Log** и для термов и для котермов используются одни и те же переменные (т. е. теории), а также одни и те же категорные конструкции (произведения, копроизведения). Это наводит на мысль переопределить (LT7) и (I8) следующим образом:

(LT7') Для каждого терма s типа $\mathcal{L}_2$ и переменной y типа $\mathcal{L}_1$ имеется терм $s(\lambda y)$ типа ${}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2$.

Это следует понимать в том смысле, что

(I8') Для любого терма s типа $\mathcal{L}''$, если переменной y над $\mathcal{L}'$ нет в списке $\bar{x}$, то $|s(\lambda y)|_{\bar{x}}$ является *дополняющей транспозицией* $||s||_{\bar{x},y} : \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n \oplus \mathcal{L}'$, т. е. морфизмом $\widehat{|s|_{\bar{x},y}} : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to^{\mathcal{L}'} \mathcal{L}''$, таким, что $f = \overline{\overline{||s||_{\bar{x},y}}} \circ \widehat{|s|_{\bar{x},y}}$, где $f : \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$. Если же связанная переменная y имеется в списке $\bar{x}$, то это нерелевантное совпадение. Тогда мы замещаем y в $s(\lambda y)$ какой-нибудь переменной над $\mathcal{L}'$, не содержащейся ни в s, ни в списке $\bar{x}$.

В этом случае мы получаем внутренний язык **Log**, в котором существуют одновременно для любых формул φ и ψ формулы $\varphi \wedge \psi, \varphi \to \psi, \bot, \neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \leftarrow \psi, \top, \ulcorner \varphi$. Подобный язык представляет собой не что иное, как язык для так называемой H-B-логики, чьей алгебраической моделью являются *полубулевы* алгебры (абстрактная алгебра $(A, \wedge, \vee, \to, \leftarrow, \neg, \ulcorner)$ называется полубулевой алгеброй„ если $(A, \wedge, \vee, \to, \neg)$ является алгеброй Гейтинга, а $(A, \wedge, \vee, \leftarrow, \ulcorner)$ — брауэровой алгеброй [8, p. 8].

4 Внутренняя логика Log

Перейдем теперь к построению внутренней логики **Log**, используя вначале схему построния логики топоса, рассмотренную К. Маклэрти. Экстенсионалом φ по списку $\bar{x}$ является подобъект $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$, классифицируемый $|\varphi|_{\bar{x}}$. Будем записывать этот экстенсионал как $[\bar{x} : \varphi]$ и читать эту запись как «все $\bar{x}$, такие, что φ». Например, мы получаем

$$\begin{gathered}
[\bar{x} : \top] = \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n \\
[\bar{x} : \varphi \& \psi] = [\bar{x} : \varphi] \cap [\bar{x} : \psi] \\
[\bar{x} : \varphi \to \psi] = [\bar{x} : \varphi] \Rightarrow [\bar{x} : \psi] \\
[\bar{x} : \varphi \leftarrow \psi] = [\bar{x} : \varphi] \Leftarrow [\bar{x} : \psi]
\end{gathered}$$

и $[\bar{x} : (\forall y)\varphi]$ представляет собой универсальную квантификацию $[\bar{x}, y : \varphi]$ по проекции, соответствующей y. Здесь $\Rightarrow$ есть импликация, а $\Leftarrow$ является коимпликацией (псевдоразностью или импликацией Брауэра).

Формула φ называется *истинной*, если ее экстенсионалом являются в точности $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$, когда $\bar{x}$ пробегает по всем свободным переменным φ, т. е. по всем теориям $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$.

Будем говорить, что формула φ влечет ψ, если ее экстенсионал содержится в экстенсионале ψ. Более того, для любого конечного множества формул Γ будем записывать $[\bar{x} : \Gamma]$ для пересечения экстенсионалов над $\bar{x}$ всех формул в Γ. В частности, $[\bar{x} : \,] = \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$ для пустого множества формул. Будем говорить, что Γ *влечет* φ тогда и только тогда, когда $[\bar{x} : \Gamma] \subseteq [\bar{x} : \varphi]$ и $\bar{x}$ есть список в точности всех свободных переменных из Γ и φ.

Секвенция представляет собой выражение $\Gamma : \varphi$, где Γ является конечным (возможно пустым) множеством формул и φ есть формула. Будем понимать $\Gamma : \varphi$ как утверждение, что формулы из Γ влекут φ. Секвенция *истинна* тогда и только тогда, когда Γ действительно влечет φ. В частности, секвенция $: \varphi$ с пустой левой частью истинна тогда и только тогда, когда $[\bar{x} : \varphi]$ состоит из всех x из $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n$ и таким образом тогда и только тогда, когда φ истинна. Если нам известно, что секвенция $\Gamma : \varphi$ истинна, то мы можем записать $\Gamma \vdash \varphi$.

Логика топоса, как известно [6, p. 129], может быть сформулирована в виде списка правил вывода для подобных секвенций, т. е. с помощью правил, действующих таким образом, что применяя их к истинным секвенциям, мы получаем истинные секвенции. Однако в нашем случае, как это явствует из построенного нами ранее языка для **Log**, наша логика, полученная подобным способом, должна быть двойственной, отражая наличие двух алгебр в **Log** — алгебры Гейтинга и алгебры Брауэра. Отсюда подходящей секвенциальной системой у нас может быть секвенциальная формулировка H-B-логики, которую можно найти в [7, с. 25].

$$\frac{*}{\varphi : \varphi} \qquad \frac{*}{: \top} \qquad \frac{*}{\bot : \varphi}$$

$$\frac{\Gamma : \Delta}{\Gamma : \Delta, \varphi}(\text{: ослабление}) \quad \frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma, \psi : \varphi}(\text{ослабление :})$$

$$\frac{\Gamma : \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma : \Delta, \varphi}(\text{: сокращение}) \quad \frac{\Gamma, \psi, \psi : \varphi}{\Gamma, \psi : \varphi}(\text{сокращение :})$$

$$\frac{\theta : \Gamma, \varphi, \psi, \Delta}{\theta : \Gamma, \psi, \varphi, \Delta}(\text{: перестановка}) \quad \frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta : \theta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta : \theta}(\text{перестановка :})$$

$$\frac{\Gamma : \Theta, \varphi \quad \varphi, \Delta : \Sigma}{\Gamma, \Delta : \Theta, \Sigma}(\text{сечение}) \quad \begin{array}{l}\text{(если каждая переменная, свободная в } \varphi,\\ \text{свободна в } \Gamma \text{ или в } \varphi)\end{array}$$

$$\frac{\Gamma : \varphi, \Delta}{\Gamma(x/s) : \varphi(x/s), \Delta(x/s)}(\text{подстановка}) \quad \begin{array}{l}\text{(для любого терма } s\text{, свободного}\\ \text{по } x \text{ во всех формулах)}\end{array}$$

$$\frac{\Gamma : \varphi}{\Gamma : \varphi \vee \psi}(: \vee 1) \quad \frac{\Gamma : \psi}{\Gamma : \varphi \vee \psi}(: \vee 2) \quad \frac{\theta : \Gamma, \varphi, \psi}{\theta : \Gamma, \varphi \vee \psi}(: \vee 3)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi : \Delta \quad \Gamma, \psi : \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi : \Delta}(\vee :) \quad \frac{\Gamma : \Delta, \varphi \quad \Gamma : \Delta, \psi}{\Gamma : \Delta, \varphi \wedge \psi}(: \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi : \theta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi : \theta}(\wedge :1) \quad \frac{\varphi : \Gamma}{\varphi \wedge \psi : \Gamma}(\wedge :2) \quad \frac{\psi : \Gamma}{\varphi \wedge \psi : \Gamma}(\wedge :3)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi : \psi}{\Gamma : \varphi \to \psi}(: \to) \quad \frac{\Gamma, \Delta : \varphi \quad \psi, \Gamma, \Delta : \theta}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Delta : \theta}(\to :)$$

$$\frac{\theta : \Gamma, \Delta, \varphi \qquad \psi : \Gamma, \Delta}{\theta : \Gamma, \Delta, \varphi \leftarrow \psi}(: \leftarrow\ ) \quad \frac{\varphi : \Gamma, \psi}{\varphi \leftarrow \psi : \Gamma}(\ \leftarrow :)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi :}{\Gamma : \neg\varphi}(:\neg) \quad \frac{\Gamma : \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma : \Delta}(\neg:)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi : \Delta}{\Gamma : \Delta, \ulcorner \varphi}(:\ulcorner) \quad \frac{: \Gamma, \varphi}{\neg\varphi : \Gamma}(\ulcorner:)$$

Антецедент и сукцедент секвенций в вышеприведенных правилах не могут быть одновременно более чем одноэлементными. Например, в правиле ($\vee$:), если Δ есть (непустое) множество формул, то Γ пусто, а если Γ есть (непустое) множество формул, то Δ состоит не более чем из одной формулы. При этом, если в Γ и в Δ формулы в качестве главных связок содержат $\leftarrow$ и $\ulcorner$ ($\rightarrow$ и $\neg$), то сначала следует применять правила вывода к формулам в Γ (Δ).

Таким образом, внутренний язык категории логических систем **Log** представляет собой язык, позволяющий рассуждать как в стандартном категорном (интуиционистском) ключе о различных построениях составных логических систем, так и в рамках паранепротиворечивой логики (логики Брауэра), когда секвенции можно рассматривать как доказательства альтернатив, исходя из какой-либо гипотезы.

Литература

[1] *Васюков В.Л.* Проблема контекста интерпретации в универсальной логике // Логические исследования. Вып. 14. М., 2007. С.105-130.

[2] *Васюков В.Л.* Металогика универсальной логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы IX Общероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 22-24 июня 2006 г. Спб.ГУ, 2006. С. 345-347.

[3] *Джонстон П.Т.* Теория топосов. М.: Наука, 1986.

[4] *Béziau J.-Y.* From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic // Logica Universalis / J.-Y. Béziau (ed.). Basel, 2005. P. 3-18.

[5] *Caleiro C., Gonçalves R.* Equipollent Logical Systems // Logica Universalis / J.-Y. Béziau (ed.). Basel, 2005. P. 99-111.

[6] *McLarty C.* Elementary Categories, Elementary Toposes. Oxford: Clarendon Press, 1992.

[7] *Rauszer C.* A Formalization of the Propositional Calculus of H-B-logic // Studia Logica. 1973. Vol. 33. №1. P. 23-34.

[8] *Rauszer C.* An algebraic and Kripke-style appraoach to a certain extension of intuionistic logic // Dissertationes Mathematicae, CLXVII. PWN, Warszawa, 1980.

[9] *Vasyukov V.L.* Structuring the Universe of Universal Logic // Logica Universalis. 2007. Vol. 1-2. P. 277-294.
[10] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi // Synthese Library. Vol. 199. Dordrecht, 1988.